

Cours 21

Ex 192

polynôme minimal scindé en racines simples

$\Leftrightarrow$ diagonalisable

Ex 193

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$$

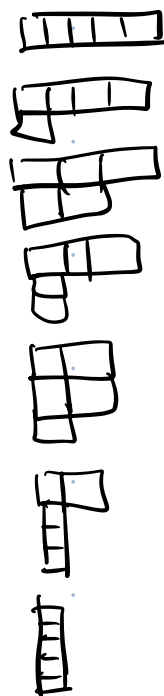
$$\varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1$$

$$\operatorname{rg}(X - \alpha \operatorname{Id}) = \#\{i \mid \varepsilon_i = 1\}$$

• $\{\text{partitions de } 5\} \xleftrightarrow[\alpha]{\text{bij}}$ $\{\text{possibilités de formes de Jordan}\}$

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$



$$\dim \ker(A - \alpha \cdot \operatorname{Id}) = 3 \Rightarrow \text{longueur de la partition} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \text{on} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

i.e. $3+1+1$ on $2+2+1$

Ex 196

$$J_{\lambda, k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$

$$E_{\lambda} = \ker(J - \lambda \cdot \text{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{\lambda, k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda, k_m} \end{pmatrix} = A'$$

$$\ker(A - \lambda \cdot \text{Id}) \simeq \ker(A' - \lambda \cdot \text{Id}) = \ker \begin{pmatrix} J_{0, k_1} & & \\ & J_{0, k_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{0, k_m} \end{pmatrix}$$

$$= \text{Vect} \{ e_1, e_{k_1+1}, e_{k_1+k_2+1}, \dots \}$$

$$\dim = m$$

Ex 197

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ \\ \\ 0 \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k$

$$\begin{aligned} J : e_1 &\longmapsto \lambda e_1 && \Rightarrow \text{Vect}\{e_1\} \text{ est invariant} \\ e_2 &\longmapsto e_1 + \lambda e_2 && \Rightarrow \text{Vect}\{e_2\} \text{ n'est pas invariant} \\ &&& \text{mais Vect}\{e_1, e_2\} \text{ est invariant} \end{aligned}$$

Plus généralement, $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ est invariant $\forall 0 \leq i \leq k$.

Exo : Si V est un sous-espace invariant
(i.e. $V = J \cdot V = \dots$ sous- $k[T]$ -module de l'endomorphisme engendré par J)
Si $x = c_1 e_1 + \dots + c_i e_i \in V$ avec $c_i \neq 0$
Alors $V = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}$

Puissance extérieurement

A : Anneau commutatif unitaire

$$M \in A\text{-Mod}$$

Rappel . $T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(M)$ ou $T^n(M) = \underbrace{M \otimes \dots \otimes M}_n$ n -fois

algèbre tensorielle

$$M \xrightarrow{f} B \leftarrow A\text{-algèbre}$$

$$\downarrow \quad \nearrow \exists! \text{ morphisme de } A\text{-algèbre}$$

• $S(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(M)$ ou $S^n(M) = \frac{T^n(M)}{\langle x \otimes y - y \otimes x \rangle}$

algèbre symétrique

$$M \xrightarrow{f} B \leftarrow A\text{-algèbre commutative}$$

$$\downarrow \quad \nearrow \exists! \text{ morphisme de } A\text{-algèbre (comm.)}$$

Algèbre extérieurement

$$\text{car}(A) \neq 2$$

A, M comme avant

$$\bigwedge M := \frac{T(M)}{\langle x \otimes y + y \otimes x \rangle} =: \mathcal{I}$$

idéal bil.
engendré.

Rq Certain auteurs utilise la définition

$$\dot{\Lambda}M := T(M) / \langle x \otimes x \rangle =: I$$

qui est équivalente à notre si $\text{car}(A) \neq 2$

Relation ① $(x+y) \otimes (x+y) = \underbrace{x \otimes x}_{\substack{\uparrow \\ I}} + \underbrace{y \otimes y}_{\substack{\uparrow \\ I}} + \underbrace{x \otimes y + y \otimes x}_{\substack{\uparrow \\ I}}$

$$I \supset J$$

② si $\text{car} \neq 2$ et $2 \in A^\times$

$$2x \otimes x = x \otimes x + x \otimes x \in J$$

$$\Rightarrow x \otimes x \in J \quad \text{Donc } I \subset J$$

Dans $\dot{\Lambda}M$ on note $x \wedge y$ la classe de $x \otimes y$

$$\text{Comme } x \otimes y = -y \otimes x$$

$$\Rightarrow x \wedge y = -y \wedge x \text{ dans } \dot{\Lambda}M$$

aussi si $2 \in A^\times$

$$x \wedge x = 0 \text{ dans } \dot{\Lambda}M$$

Par construction, $\wedge M$ est une A -algèbre, la multiplication est notée $\wedge$.

formule:

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \wedge (y_1 \wedge \dots \wedge y_m)$$

$$= x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_m.$$

Def $\wedge M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \wedge^n M$ où $\wedge^n M =$ l'image
de $T^n(M)$
par $T^n M \rightarrow \wedge^n M$

Prop Si M est libre de rg n

Alors $\wedge^k M$ est libre de rg $\binom{n}{k}$

En particulier $\wedge^k M = 0$ si $k > n$.

Preuve: A-base de $\wedge^k M = \wedge^k (A \cdot e_1 \oplus \dots \oplus A \cdot e_n)$

est $\left\{ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \right\}$

□

Exemple classique

$V := \mathbb{R}$ espace vectoriel de dim 3

$$V = \text{Vect} \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$\wedge^2 V = \text{Vect} \left\{ \underset{\substack{!! \\ \varepsilon_3}}{e_1 \wedge e_2}, \underset{\substack{!! \\ \varepsilon_2}}{e_3 \wedge e_1}, \underset{\substack{!! \\ \varepsilon_1}}{e_2 \wedge e_3} \right\}$$

$$\dim \wedge^2 V = 3 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_1$$

$$v = ae_1 + be_2 + ce_3, \quad w = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3$$

$$v \times w := v \wedge w$$

$$= (ae_1 + be_2 + ce_3) \wedge (a'e_1 + b'e_2 + c'e_3)$$

$$= (ab' - ba')e_1 \wedge e_2 - (ac' - ca')e_1 \wedge e_3$$

$$+ (bc' - cb')e_2 \wedge e_3$$

$$= (bc' - cb')\varepsilon_1 - (ac' - ca')\varepsilon_2 + (ab' - ba')\varepsilon_3$$

En L1, on avait écrit

$$(a, b, c) \times (a', b', c') = (bc' - cb', -ac' + ca', ab' - ba')$$